

## Die Leiterplatte als Kühlkörper

Dr. Johannes Adam  
Mentor Graphics (Deutschland) GmbH  
Mechanical Analysis Division, D-70794 Filderstadt  
<http://www.mentor.com/mechanical>  
[johannes\\_adam@mentor.com](mailto:johannes_adam@mentor.com)

### Inhaltsverzeichnis

1.	Warum ist Temperatur ein Problem und wie kann man es lösen?	1
2.	Temperatur und Wärme	1
2.1.	Energiegleichgewicht	2
2.1.1.	Der Erste Hauptsatz	2
2.1.2.	Energieabfuhr	2
3.	Temperaturvorhersage 0-dimensional	3
3.1.	Grobe Schätzung	3
3.2.	Nusselt-Korrelationen	4
3.3.	Wärmewiderstand der Konvektion, der Wärmeleitung und Schaltungen	5
4.	Wärmespreizung 1-dimensional	6
4.1.	Lineare Platte ( $x$ )	6
4.2.	Vertikaler Temperaturgradient, Biotzahl	8
4.3.	Linear, räumlich variable Wärmeleitfähigkeit	8
4.4.	Zylindersymmetrische Platte ( $r$ )	10
5.	Wärmespreizung 2-dimensional, isotrop	11
5.1.	Halbseitig gekühlte Platte	11
5.2.	Bemerkungen zum Wärmespreizwinkel	13
5.3.	Praktische Faustformel für Wärmespreizung	14
6.	Wärmespreizung 2-dimensional, orthotrop	14
6.1.	Analytische „N-Gleichung“	14
7.	Anwendungsbeispiel: SMD-LED auf einer Platte mit Heat-Spreader	17
8.	Wärmespreizung und Strombelastbarkeit von Leiterbahnen	18
8.1.	Die Designrichtlinie IPC-2221	18
8.2.	Modellrechnungen und Kritik an der IPC-2221	20
8.3.	Katalog von Strombelastbarkeitsdiagrammen und empirischer Zusammenhang der Parameter	21
8.4.	Leiterbahndicke	23
8.5.	Polyimidfolie	23
8.6.	Keramiksustrat	23

### 1. Warum ist Temperatur ein Problem und wie kann man es lösen?

Eine Leiterplatte (printed circuit board, PCB) ist, vereinfacht gesagt, ein mit Hilfe von Kunstharz verpresstes Laminat aus kupferbeschichteten Kunststoffplatten. Das Leiterbild auf den einzelnen Lagen wird dabei photochemisch durch Ätzung erzeugt. Die Temperaturbeständigkeit einer Leiterplatte ist allerdings beschränkt. Beim Standardmaterial FR4 (Flame Retardant 4) liegt die empfohlene Maximaltemperatur bei Dauerbelastung bei ca. 100 °C. Bei höheren Temperaturen kommt es zu chemischen Reaktionen, Delamination und Verbiegung und damit zu einem Verlust der elektrischen Funktionsfähigkeit (Glaspunkttemperatur bei ca. 130 °C). Eine ähnliche Temperaturgrenze bei ca. 100 °C gibt es auch für Halbleiterbausteine (packages). Die Temperaturbeständigkeit der Lotverbindungen ist etwas besser.

Die meisten Bauteile haben ohne Leiterplatte keine thermischen Überlebenschancen weil sie nicht die für die notwendige Wärmeabfuhr erforderliche Oberfläche haben. Durch *Wärmeübertragung in die Leiterplatte und die dortige Wärmespreizung* (oder durch aufgeklebte Kühlkörper) wird die Wärme an die Umgebung abgegeben.

Für die *erste Abschätzung* von Bauteiltemperaturen machen wir uns in diesem Vortrag in der Tat teilweise schon lange bekannte Resultate aus der Wärmeübertragung an Platten (Kühlkörperrippen) zu Nutze.

### 2. Temperatur und Wärme

Wie hoch die Temperatur der Leiterplatte oder des Bauteils bei einer bestimmten Verlustleistung (Wärmestrom) wird, hängt von den äußeren Umständen ab:

- der *lokalen Wärmeabfuhr*: je effektiver die Kühlung = Wärmeableitung, desto niedriger die Temperatur - und umgekehrt.

- den *Umgebungs- und Randbedingungen*: je kälter die Umgebung oder je näher eine kalte Fläche, desto niedriger die Temperatur.

Es ist aber nie so, dass von einer bekannten Verlustleistung ohne nähere Angaben über die Kühlungssituation auf eine Temperatur geschlossen werden kann. Wenn es jemand tut, dann macht er unbewusste Annahmen.

## 2.1. Energiegleichgewicht

### 2.1.1. Der Erste Hauptsatz

Der Erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet „Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant“. In unserem Fall heißt das, dass die Verlustleistung  $P$  [W], die durch Joulesche Wärme und Schaltverluste in den Bauteilen entsteht in andere thermische Formen der Energie (hier: warme Luft und Strahlung) umgewandelt werden muss, so dass im thermischen Gleichgewicht (d.h. im zeitlich eingeschwungenen Zustand) im Netto Null herauskommt

$$\text{Energiezufuhr} - \text{Energieabgabe} = 0$$

Die Temperatur stellt sich als *Ergebnis* des Gleichgewichts von Heizleistung  $P(T)$  und Kühlleistung  $K(T)$  ein

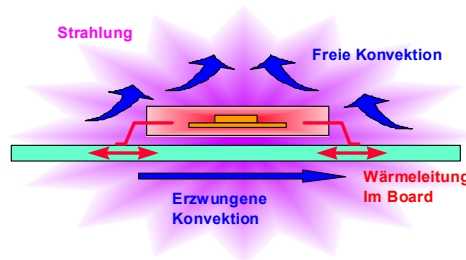
$$P(T) = K(T) \quad (2.1a)$$

Die elektrische Heizleistung ist also ein Energie(zu)fluß = Wärmemenge/Zeit [ $J/s = W \cdot s/s = W$ ] und ebenso ist die Kühlleistung ein Energiefluß. Eine Temperaturabhängigkeit der Verlustleistung nehmen wir in diesem Vortrag nicht in Betracht, kann aber für bestimmte Bauteile erheblich sein ( $R_{\text{dson}}(T)$  bei Dioden).

### 2.1.2. Energieabfuhr

Drei Prozesse kühlen die Leiterbahn/Leiterplatte: *Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung*. Der Wärmefluss  $P$ , der im Bauteil entsteht, wird über Wärmeleitung in das Leiterplattenmaterial transportiert und dort mehr oder weniger stark geometrisch gespreizt. Der ‚Temperaturfleck‘ gibt einen Teil des Wärmeflusses  $\dot{Q}$  an die Luft ab (Konvektion) und einen Teil über Wärmestrahlung (Infrarotphotonen) an die Umgebung<sup>1</sup>

$$K(T) = \dot{Q}_{\text{Ltg}}(T) + \dot{Q}_{\text{konv}}(T) + \dot{Q}_{\text{rad}}(T) \quad (2.1b)$$



**Fig. 2-1:** Bauteil und Leiterplatte im Querschnitt mit den 3 Wärmetransportmechanismen

Wenn der Wärmestrom gut abfließt, ergibt sich bei gleicher Verlustleistung eine niedrige Temperatur  $T$ , wenn er schlecht abfließt, eine höhere Temperatur. Die formelmäßigen Zusammenhänge sind folgende.  $\vec{q}$  sei der lokale Wärmestromdichtevektor [ $W/m^2$ ].

Wärmeleitung	Fouriersches Gesetz	$\vec{q}_{\text{Ltg}} = -\lambda \nabla T$	$\lambda$ Wärmeleitfähigkeit des Festkörpers <sup>2</sup> [ $W/m \cdot K$ ], $\nabla T$ = lokaler Temperaturgradient [ $K/m$ ].
Konvektion	Newtonsches Gesetz	$\vec{q}_{\text{konv}} = \alpha(T)(T - T_U) \vec{n}$	$\alpha$ Wärmeübergangskoeffizient <sup>3</sup> [ $W/m^2$ ], $T_U$ = Umgebungstemperatur [ $^{\circ}C$ oder $K$ ]. $\vec{n}$ = Normalvektor zur Leiterplatte [-]

<sup>1</sup>  $Q$  ist der Formelbuchstabe für die Wärmemenge [Einheit Joule=J] und der Punkt darüber das Symbol für die zeitliche Änderung [J/s], d.h. für den Wärmefluß.

<sup>2</sup> In der internationalen Literatur wird der Buchstabe  $k$  gebraucht. In Deutschland ist traditionell  $\lambda$  üblich.

<sup>3</sup> In der internationalen Literatur wird der Buchstabe  $h$  gebraucht. In Deutschland ist traditionell  $\alpha$  üblich.

Wärmestrahlung	Stefan-Boltzmann-Gesetz	$\bar{q}_{rad} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_{Platte}^4 - T_U^4) \bar{n} \ll 4$	$\varepsilon$ Emissionskoeffizient (IR), $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ , $T$ hier unbedingt in [K]
----------------	-------------------------	---	---

Typische Zahlenwerte in den obigen Gleichungen sind:

- Wärmeleitfähigkeit (Stoffeigenschaft)

Stoff	$\lambda$ [W/(m·K)]
Reinkupfer	390
Reinaluminium	240
Reinsilizium @ 100 °C	117
Rein-FR4 (Eopydharz)	0.3
FR4 mit Glasgewebe	0.5
Luft (ruhend)	0.026

- Wärmeübergangszahl (*keine* Stoffkonstante!)<sup>5</sup>

Strömungstyp	$\alpha$ [W/m <sup>2</sup> ·K]
Freie Konvektion (Auftriebsströmung)	$\alpha \approx 5 \dots 7 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
Erzwungene Konvektion (Lüfterströmung)	$\alpha \approx 10 \dots 50 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ je nach Luftgeschwindigkeit
Kombination aus freier Konvektion + Strahlung ( $\varepsilon=0.9$ )	$\alpha \approx 10 \dots 12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

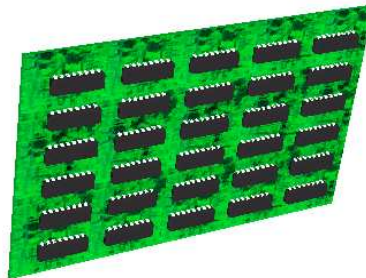
- Infrarot-Emissionskoeffizient (Oberflächeneigenschaft)

Oberfläche	$\varepsilon$ [-]
Aluminium (Metalle) poliert	0.03
Aluminium oxidiert	0.2 ... 0.3
Lacke (alle Farben), Kunststoffoberflächen	0.8 ... 0.9
Keramik	0.5

### 3. Temperaturvorhersage 0-dimensional

#### 3.1. Grobe Schätzung

Unter 0-dimensional verstehen wir eine pauschale Temperaturabschätzung ohne Kenntnis und Benutzung räumlicher Details. Die Leiterplatte sei thermisch homogen belastet ( $\bar{q} = \text{const}$ ), entweder durch gleichförmig verteilte Bauteile oder nur als erste Annahme.



**Fig. 3-1:** Eine homogen beheizte Leiterplatte als Paradigma für 0-dimensionale Temperaturvorhersage

<sup>4</sup> Eigentlich müsste hier noch eine Winkelabhängigkeit rein

<sup>5</sup> Die Bestimmung von  $\alpha$  ist ein weites Feld.  $\alpha$  hängt nicht nur von der Luftgeschwindigkeit ab, sondern auch von der Geometrie und Größe des umströmten Körpers (s. Kap 3.2)

Aus dem Energiegleichgewicht mit dem Newtonschen Gesetz und Integration über die *gesamte* Plattenoberfläche  $A$ :  $P = \iint \bar{q}_{konv+rad} \cdot \bar{n} dS = \alpha \cdot (T - T_U) \cdot A$  (Fourier liefert wegen per def. fehlender räumlicher Temperaturunterschiede keinen Beitrag) folgt sofort eine mittlere Plattentemperatur  $\bar{T}$

$$\bar{T} = T_U + \frac{P}{\alpha \cdot A} \quad (3.1)$$

**Beispiel:** Euroformat-PCB mit 20 W bei 30°C Umgebung:  $\bar{T} = 30^\circ\text{C} + 20\text{ W} / (12\text{ W/m}^2\text{K} \cdot 2 \cdot 0.1\text{ m} \cdot 0.16\text{ m}) \approx 80^\circ\text{C}$  (der Faktor 2 im Nenner kommt von der Gesamtfläche Vorder- + Rückseite).  $\alpha = 12\text{ W/m}^2\text{K}$  ist ein typischer Wert für freie Konvektion + Strahlung.

### 3.2. Nusselt-Korrelationen

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  lässt sich genauer abschätzen, wenn man empirische und theoretische Zusammenhänge aus der Wärmeübertragung benutzt (s. z.B. Wutz, 1991; Wagner, 1998; Lienhard und Lienhard, 2004). Die *Nusseltzahl*  $Nu$  charakterisiert den Wärmeübergang von einer geheizten Oberfläche an das strömende Medium (ohne Strahlung). Sie ist eine dimensionslose Zahl und definiert durch

$$Nu_\ell := \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda_f} \quad (3.2)$$

$\ell$  ist die Plattenlänge in Richtung der Strömung und  $\lambda_f$  die Wärmeleitfähigkeit des Mediums. Sowohl aus einer Vielzahl von Messreihen als auch aus der Prandtl'schen Grenzschichttheorie bekommt man folgende, quasi universelle Zusammenhänge:

- Glatte Platte in laminarer erzwungener Konvektion.  $Re < 10^5$ .  $u$  ist die Anströmgeschwindigkeit,  $\nu$  die Viskosität der Luft und  $Re_\ell$  die Reynoldszahl

$$Nu_\ell = 0.6 \cdot \sqrt{Re_\ell} \quad , \quad Re_\ell = \frac{u \cdot \ell}{\nu} \quad (3.3)$$

Gln. (3.2) und (3.3) zusammengefasst ergibt

$$\alpha = \frac{\lambda_f \cdot Nu_\ell}{\ell} = 3.9 \sqrt{\frac{u}{\ell}} \quad (3.4)$$

- Glatte Platte in turbulenter erzwungener Konvektion.  $5 \cdot 10^5 < Re_\ell < 10^7$

$$Nu_\ell = 0.027 \cdot Re_\ell^{0.8}$$

- Glatte Platte in freier Konvektion. Eine ziemlich genaue Nusselt-Korrelation ist

$$Nu_H = \left\{ 0.825 + 0.31 \cdot Gr_H^{1/6} \right\}^2 \quad , \quad Gr_H = \frac{g \cdot \beta \cdot (T - T_U) \cdot H^3}{\nu^2} \quad (3.5a)$$

$H$  ist die Plattenhöhe,  $Gr_H$  wird Grashofzahl genannt,  $g = 9.81\text{ m/s}^2$  und  $\beta = 1/T_{fl}[K]$ . Eine praktischere Formel für die mittlere Nusseltzahl ist

$$Nu_H = 0.48 \cdot Gr_H^{1/4} \quad (3.5b)$$

Mit Gl. (3.2) und nach  $\alpha$  umgestellt erhält man hieraus

$$\alpha = 1.3 \cdot \left( \frac{T - T_U}{H} \right)^{1/4} \quad (3.6)$$

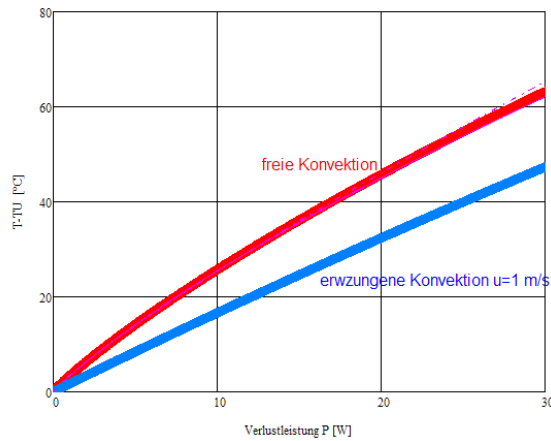
Für eine homogen geheizte (Leiter-)platte mit Strahlung kann man das Energiegleichgewicht Gl. (2.1 a,b)

- Erzwungene Konvektion:  $P - 3.9 \sqrt{\frac{u}{\ell}} \cdot (T - T_U) \cdot A - \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_U^4) = 0 \quad (3.7)$

- Freie Konvektion:  $P - 1.3 \cdot H^{-1/4} \cdot (T - T_U)^{5/4} \cdot A - \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_U^4) = 0 \quad (3.8)$

nur numerisch für  $T$  lösen; getan in Fig. 3-2. für eine Euro-LP ( $\varepsilon = 0.9$ ,  $H = \ell = 0.1\text{ m}$ ,  $A = 2 \cdot 0.16\text{ m} \cdot 0.1\text{ m}$ ) bei  $T_U = 30^\circ\text{C}$  ( $= 303\text{ K}$ ) in freier Konvektion und  $u = 1\text{ m/s}$ .

**Beispiel:** Bei 10 W wäre der Gesamtwärmeübergangskoeffizient der Europlatte für freie Konvektion  $\alpha = 10\text{ W} / (2 \cdot 0.1 \cdot 0.16 \cdot 25\text{K}) = 12\text{ W/m}^2\text{K}$  und für erzwungene Konvektion  $\alpha = 10\text{ W} / (2 \cdot 0.1 \cdot 0.16 \cdot 18\text{K}) = 17\text{ W/m}^2\text{K}$ .



**Fig. 3-2:** Temperaturerhöhung  $T-T_U$  einer Euro-Format-Leiterplatte aus dem Energiegleichgewicht Gln. (3.7) und (3.8)

Daraus abgeleitet, ist eine gute Fitformel für eine typische Leiterplatte in freier Konvektion incl. Strahlung ( $A/2=$  Länge·Breite).

$$T - T_U = 0.1 \cdot \left( \frac{P}{A/2} \right)^{0.86} \quad (3.9)$$

### 3.3. Wärmewiderstand der Konvektion, der Wärmeleitung und Schaltungen

Aus der formalen Analogie zum Ohmschen Gesetz

Ohm: Elektrischer Widerstand = Spannungsdifferenz / Strom [V/A]

lässt sich mit

Fourier: Thermischer Widerstand = Temperaturdifferenz / Wärmestrom [K/W]

formal ein *konvektiver* Wärmewiderstand als

$$R_3 := (\bar{T} - T_U) / P$$

definieren. Mit Gl. (3.1) erhält man

$$R_3 = \frac{1}{\alpha_{\text{gesamt}} \cdot A} \quad (3.10)$$

**Tab. 3-1:** Auswertung von Fig. 3-2 (incl. Strahlung).

P [W]	Freie Konvektion			Erzwungene Konvektion u=1 m/s		
	$\alpha_{\text{gesamt}}$ [W/m <sup>2</sup> K]	$R_3$ [K/W]	$T-T_U$ [K]	$\alpha_{\text{gesamt}}$ [W/m <sup>2</sup> K]	$R_3$ [K/W]	$T-T_U$ [K]
5	11	2.8	14	17	1.8	9
10	12	2.6	26	17	1.8	18
20	14	2.3	46	17	1.8	36
$H=\ell=0.1 \text{ m}, B=0.16 \text{ m}$						

Für die Wärmeleitung folgt der Wärmewiderstand aus dem Fourierschen Gesetz als:

„ Länge des Wärmedurchgangs  $d$  / (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  · Fläche des Wärmedurchgangs  $A$ ) “

$$R_{\text{lig}} = \frac{d}{\lambda \cdot A} \quad (3.11)$$

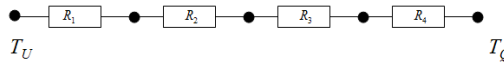
Man vergesse nie, dass

- $R_{\text{lig}}$  flächenabhängig ist
- es für die Benutzung von (3.11) keine Wärmequelle im Wärmeweg geben darf
- Wärme nicht wie Strom in Drähten fließt, sondern sich räumlich ausbreitet.

Die einfachen üblichen Schaltungen mit Wärmewiderständen sind Reihen- und Parallelschaltungen.  $T_U$  ist die bekannte Umgebungs- (Referenz-) temperatur und  $T_Q$  die gesuchte Temperatur der Wärmequelle. Zwischen beiden Punkten fließe ein Wärmestrom  $\dot{Q}$  ohne weitere Verluste und Abzweigungen.

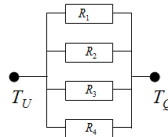
Reihenschaltung:

$$T_Q - T_U = \dot{Q} \cdot \sum_i R_i$$



Parallelschaltung:

$$T_Q - T_U = \dot{Q} / \sum_i 1/R_i$$



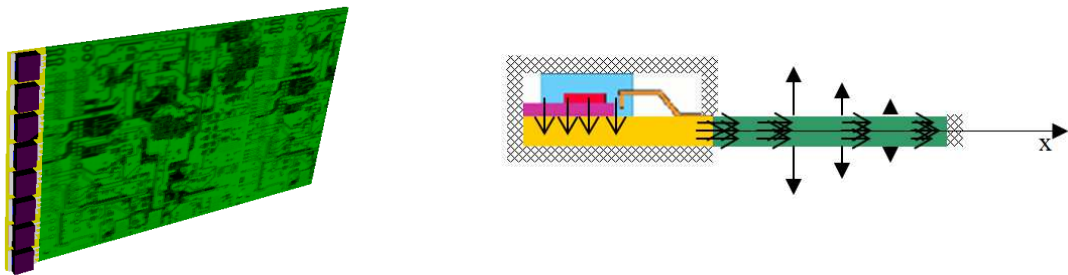
Für die Benutzung dieser Standardformeln darf *keine* Wärmequelle zwischen Anfang und Ende der Kette liegen. Wenn ja, wird es etwas komplexer.

#### 4. Wärmespreizung 1-dimensional

Beschäftigen wir uns nun als pädagogische Übung mit einer eindimensional gerichteten Wärmeübertragung. Es soll zeigen, auf welcher räumlichen Skala Temperaturprofile typischerweise abfallen.

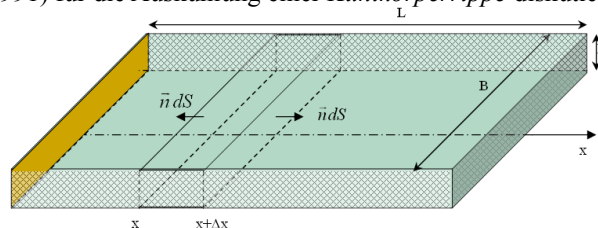
##### 4.1. Lineare Platte (x)

Ein Bauteil übertrage seinen gesamten Wärmestrom auf ein isothermes Kupferplättchen, welche an eine (Leiter-)platte ankoppelt. Die schraffierten Bereiche stellen thermische Isolierungen dar. Nur die Platte verliere über Konvektion und Strahlung Wärme mit vorgegebenem und festem  $\alpha$ .



**Fig. 4-1:** Skizze der geometrischen und physikalischen Situation für 1-dimensionale lineare Wärmeleitung. Die Pfeile sollen Wärmeströme symbolisieren. Die Wärmequelle sitzt effektiv in der Leiterplatte.

Zur Erklärung der mathematischen Analyse verwenden wir Fig. 4-2. Es ist die gleiche physikalische und geometrische Situation, die Wutz (1991) für die Auskühlung einer *Kühlkörperrippe* diskutiert.



**Fig. 4-2:** Definition der geometrischen Variablen zu Fig. 4-1 und des Kontrollvolumens. Wärme strömt bei  $x=0$  ein und nur über die obere und untere Plattenoberfläche aus.

Für das Kontrollvolumen zwischen  $x$  und  $x+\Delta x$  muss das Energiegleichgewicht, ohne interne Wärmequellen, gelten. Wir nehmen an, dass es sich um eine dünne Platte handelt, deren Dicke  $D$  klein gegen die anderen Dimensionen ist.

Wärmestrom in  $x$ -Richtung durch Wärmeleitung + Wärmestrom senkrecht durch Konvektion = 0

$$\iint \vec{q} \cdot \vec{n} dS + 2\alpha(T - T_U)B\Delta x = 0 \quad (4.1)$$

Mit dem Fourierschen Gesetz  $\vec{q}_{llg} = -\lambda \nabla T$  für die  $x$ -Richtung folgt

$$\left[ \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} \right) - \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_x \right) \right] BD + 2\alpha(T - T_U)B\Delta x = 0. \quad (4.2)$$

Nach Division durch  $\Delta x$  und Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  folgt schließlich die Differentialgleichung

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2}{D} \alpha (T - T_U) = 0. \quad (4.3)$$

Die Lösung von Gl. (4.3) wird in Wutz (1991) für verschiedene Randbedingungen am Ende der Platte bei  $x=L$  diskutiert. Aus der Vielzahl von Randbedingungen betrachten wir nur für  $x=L$  die adiabatische Randbedingung (therm. Isolation) und bei  $x=0$ , auf der Seite der Quelle, einen Wärmestromeintrag  $P$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = P \quad \text{und} \quad -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0.$$

Die Lösung lautet

$$T(x) - T_U = P \frac{n}{2\alpha B} \frac{\cosh(n(L-x))}{\sinh(nL)} \quad (0 < x < L) \quad \text{mit} \quad m := \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda D}}. \quad (4.4)$$

Für die Temperatur an der Wärmequelle bei  $x=0$  folgt daraus

$$T(0) - T_U = P \frac{m}{2\alpha B} \tanh(nL). \quad (4.5)$$

Der Wärmewiderstand der Konfiguration wäre dann  $R_4 := (T(0) - T_U) / P$

$$R_4 = \frac{m}{2\alpha B} \tanh(nL) \quad (4.6)$$

Für Werte von  $n \cdot L > 2$  gilt approximativ ganz gut (wobei die  $e$ -Funktion die Randbedingung bei  $x=L$  nicht erfüllt)

$$T(x) - T_U = P \frac{m}{2\alpha B} e^{-mL} \quad T(0) - T_U = P \frac{m}{2\alpha B}. \quad (4.7)$$

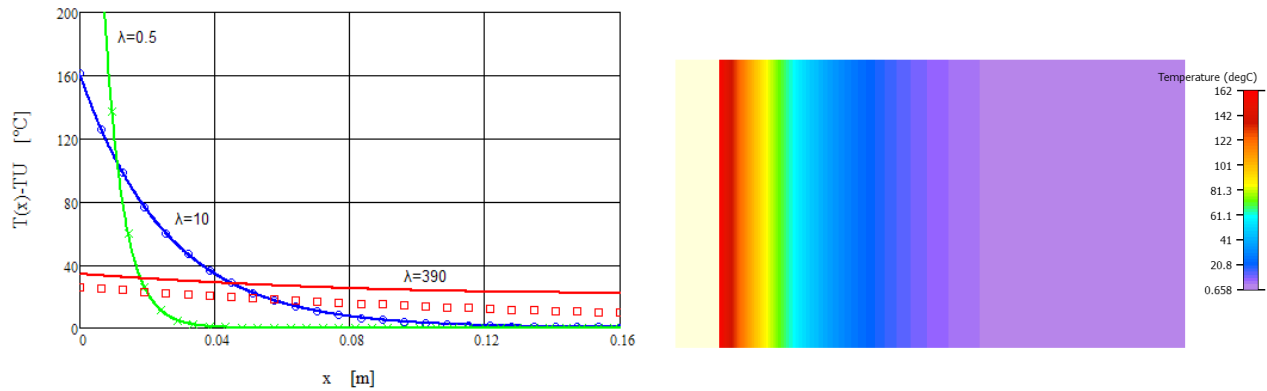
In Fig. 4-3 ist der Verlauf von Gln. (4.4) und (4.7) für die Werte von Tab. 4-1 dargestellt. Im Gegensatz zu der Analyse in Kap. 3 spielt jetzt die Wärmeleitfähigkeit der Platte für die „Bauteil“temperatur eine große Rolle.  $\lambda=0.5$  wäre eine reine FR4 Platte,  $\lambda=10$  eine „irgendwie typische PCB“ (Kordyban, 1997) und  $\lambda=390$  eine Kupferplatte.

$\delta := 1/m$  kann man als *Längenskala des Temperaturabfalls* ansehen, bei der die Bauteiltemperatur auf  $T(0)/e$  abgefallen ist. Ohne einen Kupferanteil wäre diese PCB nicht überlebensfähig.

**Tab. 4-1:** Auswertung von Gl. (4.4) am Euro-Beispiel

$\lambda$	$m$ [1/m]	$\delta=1/m$ [mm]	$T(0)-T_U$	$R_4$ [K/W]
0.5	173	6	720	72
10	39	25	161	16
390	6	166 (>L)	20	2
$P=10$ W, $\alpha=12$ W/m <sup>2</sup> K, $L=0.16$ m, $B=0.1$ m, $D=1.6$ mm				

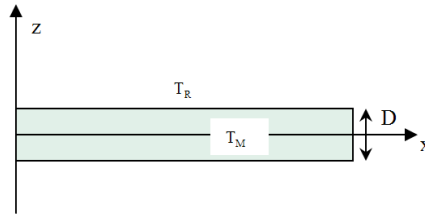
<sup>6</sup>  $\tanh(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$



**Fig. 4-3:** links: Verlauf der Plattentemperatur (Tab. 4-1) für  $\lambda=0.5, 10$  und  $390$  W/mK aus Gln. (4.4) (Linien) und (4.7) (Symbole); rechts: Simulationsergebnis mit FloTHERM zu  $\lambda=10$  W/mK.

#### 4.2. Vertikaler Temperaturgradient, Biotzahl

Wann kann man davon ausgehen, dass unsere Platte in vertikaler Richtung gleichförmig durchgewärmt ist, bzw. dass wir nicht noch zusätzlich eine vertikale Temperaturfunktion ermitteln müssen? Mit Fig. 4-4 ausgedrückt: wann ist Temperatur in der Mittelebene  $T_M$  nicht viel größer als die Randtemperatur  $T_R$ ?



**Fig. 4-4:** Skizze zum vertikalen Temperaturgradient

Der Wärmestrom pro Flächeneinheit durch Wärmeleitung in vertikaler Richtung in der Platte ist  $q = \lambda \frac{T_M - T_S}{D/2}$ , der Wärmestrom aus der Platte heraus ist  $q = 2\alpha(T_R - T_U)$ . Im thermischen Gleichgewicht müssen die Flüsse gleich sein, so dass sich

$$\frac{T_M - T_S}{T_R - T_U} = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} \quad (4.8)$$

ergibt. Die Größe auf der rechten Seite nennt man *Biotzahl*  $Bi$

$$Bi_z := \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} \quad (4.9)$$

Sobald  $Bi_z < 0.1$  kann man ingenieurtechnisch die Kerntemperatur von Festkörpern mit seiner Oberflächentemperatur gleichsetzen. Selbst für unseren ungünstigsten Fall von  $\lambda=0.5$  ist  $Bi_z = 12 \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 0.016 \text{ m} / 0.5 \text{ W/mK} = 0.04 < 0.1$ . Vorsicht, wg. der formalen Ähnlichkeit zur Nu-Zahl.

#### 4.3. Linear, räumlich variable Wärmeleitfähigkeit

Die Annahme eines konstanten  $\lambda$  ist hilfreich für eine analytische Lösung, könnte aber für eine Leiterplatte unrealistisch sein. Vielmehr werden sich dort gut leitende Bereiche (mehr Kupfer) mit schlecht leitenden Bereichen (mehr FR4) abwechseln. Zur Klärung der Schwankungsbreiten, simulieren wir mit  $\lambda(x)$  für folgende Fälle ( $\delta_0=1/n_0$ ):



Fall 1: gut leitend an der Wärmequelle  
 $0 < x < \delta_0: \lambda=10, \delta_0 < x < L: \lambda=1; \delta_0=26 \text{ mm}$



Fall 2: schlecht leitend an der Wärmequelle  
 $0 < x < \delta_0: \lambda=1, \delta_0 < x < L: \lambda=10; \delta_0=8 \text{ mm}$



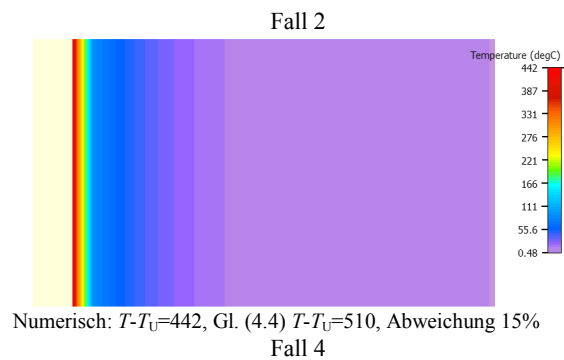
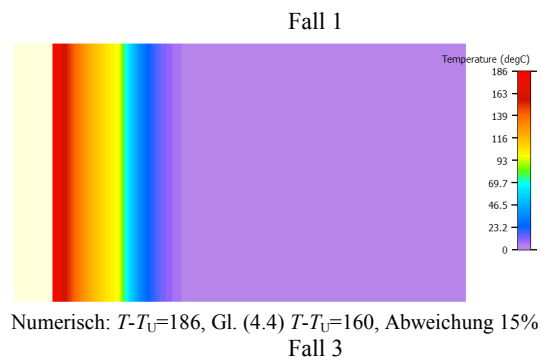
Fall 3: gut leitend sehr nah der Wärmequelle  
 $0 < x < \delta_0/5: \lambda=10, \delta_0/5 < x < L: \lambda=1; \delta_0/5=5 \text{ mm}$



Fall 4: schlecht leitend sehr nah der Wärmequelle  
 $0 < x < \delta_0/5: \lambda=1, \delta_0/5 < x < L: \lambda=10; \delta_0/5=1.6 \text{ mm}$



und vergleichen das Ergebnis mit der Lösung Gl. (4.4) wo wir ein  $m = m_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda(x=0) \cdot D}}$  verwenden. Die übrigen Parameter sind  $\alpha=12 \text{ W/m}^2\text{K}, D=0.0016 \text{ m}$ .

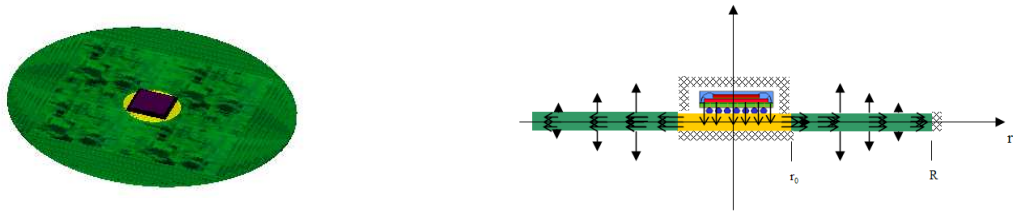


**Fig. 4-5:** Simulationsergebnisse für verschiedene Leitfähigkeiten fern oder nah zur Wärmequelle.

Aus den Ergebnissen in Fig. 4-5 lernen wird, dass es erlaubt ist mit Gl. (4.4) die Bauteiltemperatur zu schätzen, solange wir einen Sicherheitsabstand von  $\delta_0=1/n_0$  nicht unterschreiten. Das hilft für das Auslegen von Wärmespreizflächen von Transistoren.

#### 4.4. Zylindersymmetrische Platte ( $r$ )

Das Bauteil sei nun im Zentrum der Leiterplatte platziert. Aus mathematischen Gründen ist die analytische Behandlung einer kreisförmigen PCB leichter als die einer quadratischen. Die Wärmeabfuhr von einer Kreisrippe steht Pate für diese Betrachtung.



**Fig. 4-6:** Skizze der geometrischen und physikalischen Situation für 1-dimensionale zylindersymmetrische Wärmeleitung. Die Pfeile sollen Wärmeströme symbolisieren. Die Wärmequelle sitzt effektiv in der Leiterplatte. Wärmeverlust erfolgt nur über den Scheibenring außerhalb der Wärmequelle.

Gl. (4.3) schreibt sich in Zylinderkoordinaten mit dem Radius  $r$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - m^2 (T - T_U) = 0. \quad (4.10)$$

Mit den Randbedingungen

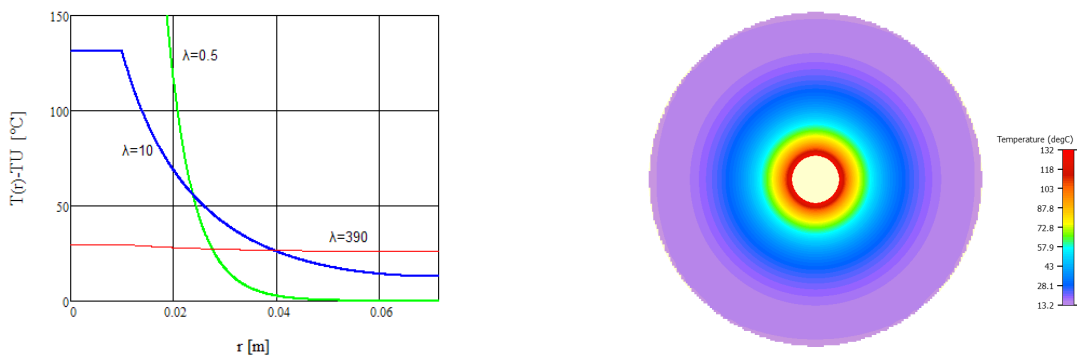
$$-\lambda(2\pi_0 D) \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_0} = P \quad \text{und} \quad -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 0$$

ist die klassische Lösung, z.B. nach Wutz (1991)

$$T(r) - T_U = \frac{P}{2\pi_0 \lambda m D} \frac{I_0(m \cdot r) \cdot K_1(m \cdot R) + K_0(m \cdot r) \cdot I_1(m \cdot R)}{I_1(m \cdot R) \cdot K_1(m \cdot r_0) - I_1(m \cdot r_0) \cdot K_1(m \cdot R)} \quad r_0 > r > R \quad (4.11)$$

$I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  sind die sog. Besselfunktionen<sup>7</sup>. Die Besselfunktionen haben ein etwas kompliziertes asymptotisches Verhalten, so dass eine wirklich vereinfachte Formel nicht möglich ist. Fig. 4-7 zeigt die Ergebnisse für die kreisförmige Fläche einer Euro-LP mit  $R = \sqrt{(0.16 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m}) / \pi} = 0.071 \text{ m}$ ,  $D = 1.6 \text{ mm}$ ,  $r_0 = 0.01 \text{ m}$  und  $P = 10$  für verschiedene Wärmeleitfähigkeiten der Platte und einen Vergleich mit einer Simulation (zu  $\lambda = 10 \text{ W/mK}$ ).

Wenn zwischen Innenradius und Außenradius mehrere Abfalllängen  $\delta$  Platz ist, ist die Randtemperatur bereits stark abgefallen und eine weitere Vergrößerung der Scheibe macht keinen Sinn. Rechnerisch sollte die ca. Bedingung  $(R - r_0) > 3\delta$  erfüllt sein.



**Fig. 4-7:** links: Verlauf der Plattentemperatur für  $\lambda = 0.5, 10$  und  $390 \text{ W/mK}$  aus Gl. (4.11). rechts: Simulationsergebnis mit FloTHERM zu  $\lambda = 10 \text{ W/mK}$ .

<sup>7</sup> MS-Excel bietet keine guten Besselfunktionen an.

**Tab. 4-2:** Auswertung von Gl. (4.11) am Euro-Beispiel. Zwischen  $\lambda=0.5$  bis 10 ist  $(R-r_0) \geq 3 \cdot \delta$ , so dass eine Vergrößerung der Platte keinen wesentlichen Temperaturgewinn mehr bringt.

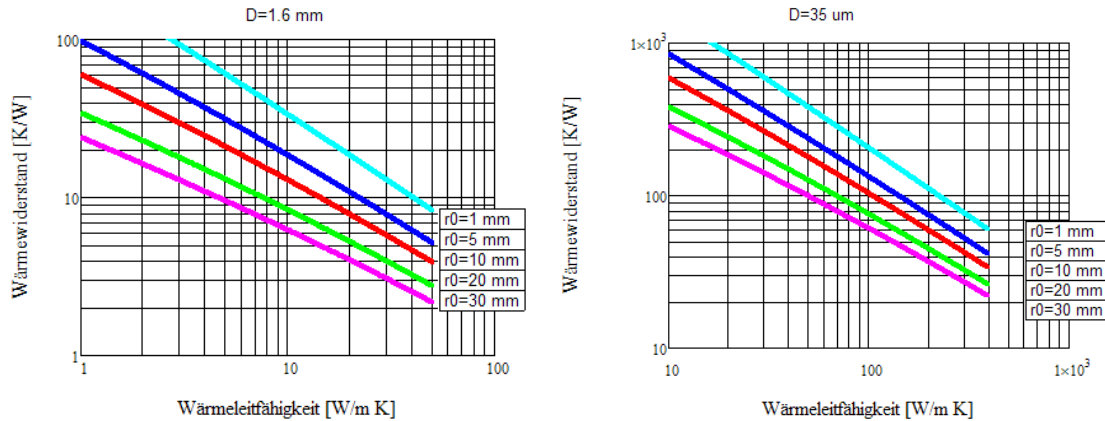
$\lambda$	$m$ [1/m]	$\delta=1/m$ [mm]	$(R-r_0)/\delta$	$T(0)-T_U$	$R$ [K/W]
0.5	173	6	10	910	91
10	39	25	2.4	131	13
390	6	166	0.4	30	3

$P=10$  W,  $\alpha=12$  W/m<sup>2</sup>K,  $R=0.071$  m,  $r_0=0.01$  m,  $D=1.6$  mm

Unter der Annahme, dass die Platte wesentlich größer ist als Abklinglänge (quasi unendlich groß) kann für die Temperatur der Wärmequelle bei  $r=r_0$  die Gl. (4.11) vereinfacht werden, da die  $K$ -Besselfunktionen für kleine Argumente gegen unendlich gehen und wesentlich größer als die  $I$ -Funktionen sind und für große Argumente  $K$  gegen 0 geht. Man erhält

$$T(r_0) - T_U = \frac{P}{2\pi r_0 \lambda m D} \frac{K_0(m \cdot r_0)}{K_1(m \cdot r_0)} \quad (4.12)$$

Der Wärmewiderstand  $R_{th}=(T(r_0)-T_U)/P$  nach Gl. (4.12) ist in Fig. 4-8 für  $\alpha=12$  W/m<sup>2</sup>K und  $D=1.6$  mm und  $D=35\mu\text{m}$  dargestellt.



**Fig. 4-8:** Wärmewiderstand einer Wärmequelle in der Konfiguration Fig. 4-6 bei verschiedenen Bauteilradien  $r_0$  und Wärmeleitfähigkeiten der Platte. Ungefähre Bauteiltemperatur ist  $P \cdot R_{th}$ . Links: Leiterplatte  $D=1.6$  mm, rechts Lage  $D=35\mu\text{m}$ .

Wenn die Wärmequelle selbst oben und unten nicht isoliert ist, können wir in Gl. (4.11) von  $P$  noch den Anteil  $2\alpha r_0^2 \pi (T(r_0) - T_U)$  abziehen, der nicht in die Kreisplatte eingespeist wird.

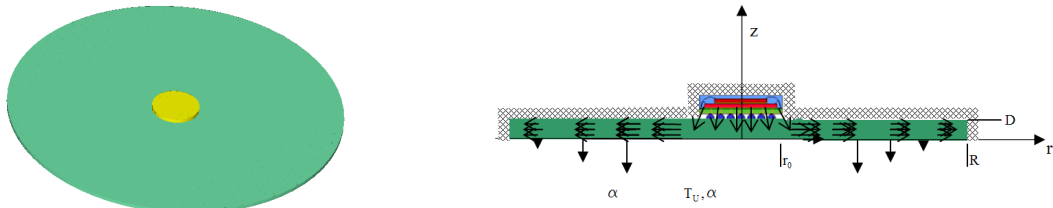
## 5. Wärmespreizung 2-dimensional, isotrop

Die bisherigen Beziehungen zwischen der Wärmequellentemperatur und den geometrischen und physikalischen Parametern waren sehr kompakt, sind aber für ein Bauteil auf einer Leiterplatte nur eine Näherung. Der Grund dafür ist, dass die Wärmequelle *nicht auf, sondern in* der Platte positioniert war. Die richtige Behandlung macht eine Analyse in  $r$  und  $z$  notwendig, was von einer Randwertaufgabe mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu partiellen Differentialgleichungen mit Rand- und Eigenwertproblemen führt.

### 5.1. Halbseitig gekühlte Platte

Eine oft zitierte Lösung für Wärmespreizung in Grundplatten von Kühlkörpern ist die von Song, Lee und Au (SLA) (1994) und Song, Lee, Au und Moran (1995). Auf der Grundplatte des Kühlkörpers (hier die Leiterplatte) mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  sitzt eine Wärmequelle. Die Konfiguration ist nach  $+z$  thermisch isoliert, kann aber nach  $-z$  Wärme an die Umgebung abgeben, wobei der Wärmestrom (in die Rippen) durch die Wärmeübergangs-

zahl  $\alpha$  parametrisiert wird. Die Annahme einer adiabatischen Randbedingung in  $+z$  ist dann gerechtfertigt, wenn der Wärmewiderstand nach  $-z$  wesentlich kleiner ist.



**Fig. 5-1:** Physikalische Situation der SLA-Lösung: Isolation nach oben, Wärmeabgabe nach unten, Wärmespreizung in der Platte. Die Wärmequelle sitzt auf der Leiterplatte.

SLA lösen die Fourierrechnung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

Die Wärmeleitfähigkeit der Platte kommt über die Randbedingung, dass der Wärmestrom  $\lambda \frac{\partial T}{\partial z^2} = q$  im Bereich der Wärmequelle ist, ins Spiel.

Upon using the method of separation of variables, the solution for the temperature distribution in the plate is obtained as

$$T(\zeta, \tau) = \frac{qa}{k} \left[ \epsilon \left( \frac{1}{Bi} + \zeta \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \epsilon) J_0(\lambda_n \tau) \cosh(\lambda_n \zeta) \left( \tanh(\lambda_n \zeta) + \frac{\lambda_n}{Bi} \right)}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n) \cosh(\lambda_n \tau) \left( 1 + \frac{\lambda_n}{Bi} \tanh(\lambda_n \tau) \right)} \right] + T_U \quad (9)$$

where  $\epsilon = a/b$ ,  $\tau = t/b$ ,  $\zeta = z/b$  and  $\gamma = r/b$ .  $J_0(\cdot)$  and  $J_1(\cdot)$  are the Bessel functions of the first kind of order 0 and 1, and the eigenvalue  $\lambda_n$  is the  $n$ -th root of the transcendental equation which satisfies the adiabatic boundary condition at  $\gamma = 1$ :

$$J_1(\lambda_n) = 0 \quad (10)$$

**Fig. 5-2:** „SLA-Lösung“ des Halb-Problems (Song, Lee und Au, 1994)<sup>8 9</sup>

SLA (1994) geben folgende praktische Näherungsformeln für die exakte Lösung an (s. a. Simons (2004)). Zuerst werden Geometrie und Wärmeübertragung durch Definition von

$$\epsilon := r_0 / R ; \quad \tau := D / R ; \quad Bi_R := \alpha \cdot R / \lambda = \frac{1}{\pi \cdot R \cdot \lambda \cdot R_{th}} \quad (5.2)$$

dimensionslos gemacht.  $R_{th} = 1/(\alpha R^2 \pi)$  ist der Abschlusswiderstand bei  $-z$  der ganzen Platte. Dann wird ein dimensionsloser Wärmewiderstand  $\Psi$  der Wärmequelle durch

$$\Psi := \sqrt{\pi} r_0 \lambda R_{th}$$

definiert. Die folgenden Gleichungen verknüpfen nun den dimensionslosen Wärmespreizwiderstand mit den anderen Größen. SLA geben eine Beziehung für den maximalen Wärmespreizwiderstand der Quelle und den durchschnittlichen Wärmespreizwiderstand der ganzen Plattenkonfiguration an

$$\Psi_{max} = \frac{\epsilon \cdot \tau}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - \epsilon) \cdot \Phi_c ; \quad \Psi_{avg} = \frac{\epsilon \cdot \tau}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} (1 - \epsilon)^{3/2} \cdot \Phi_c \quad (5.3)$$

<sup>8</sup> Beide Artikel enthalten leider viele Schreibfehler und kleine Ungenauigkeiten. Vermutung: bei  $r=R$  wird  $dT/dx=0$  entgegen der von SLA beschriebenen Annahmen nicht exakt erfüllt.

<sup>9</sup> Notationen:  $b=R$ ,  $a=r_0$ ,  $t=D$ ,  $k=\lambda$ ,  $q=P/t_0^2 \pi$ .

mit den Hilfsgröße  $\Phi_c$  und  $\lambda_c$

$$\Phi_c = \frac{\tanh(\lambda_c \cdot \tau) + \frac{\lambda_c}{\text{Bi}_R}}{1 + \frac{\lambda_c}{\text{Bi}_R} \tanh(\lambda_c \cdot \tau)} \quad \lambda_c = \pi + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \varepsilon}} \quad (5.4)$$

Der dimensionsbehaftete Wärmespreizwiderstand ist dann

$$R_{th,max} = \frac{\Psi_{max}}{\sqrt{\pi r_0 \lambda}}, \text{ bzw. } R_{th,avg} = \frac{\Psi_{avg}}{\sqrt{\pi r_0 \lambda}}.$$

Für die Temperatur der Wärmequelle muss dann noch der Abschlusswiderstand  $R_{th0}=1/(\alpha A)$  hinzuaddiert werden

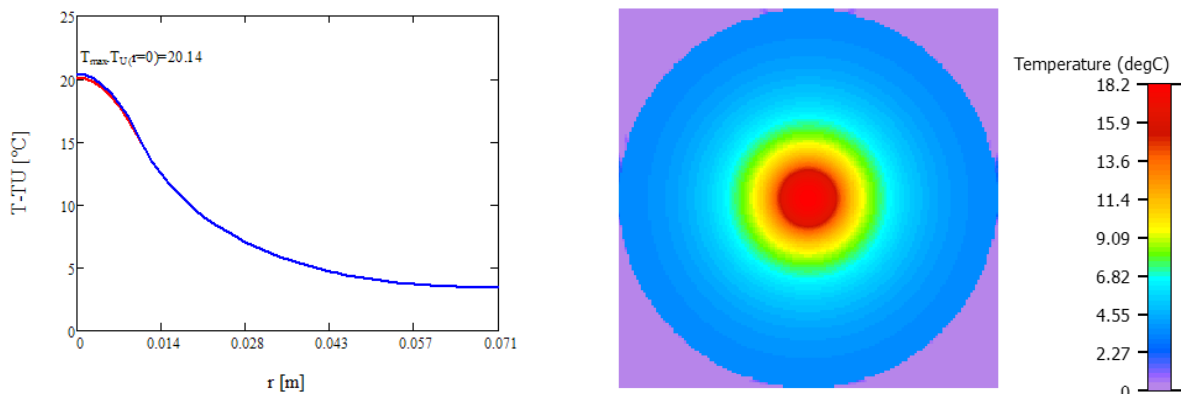
$$T_{max} - T_u = P \cdot \left( \frac{\Psi_{max}}{\sqrt{\pi r_0 \lambda}} + \frac{1}{\alpha R^2 \pi} \right) \quad (5.5)$$

Wir werten in Tab. 5-1 die Gl. (5.5) für unsere bisher verwendeten Standardparameter aus.

**Tab. 5-1:** Auswertung von Gln. (5.2 bis 5.5) am kreisförmigen Euro-Beispiel.

$\lambda$	$\text{Bi}_R$	$\Phi_c$	$\Psi_{max}$	$\Psi_{avg}$	$R_{max}$	$R_{ges,max}$	$T_{max}-T_U$	$R_{avg}$	$R_{ges,avg}$	$T_{avg}-T_U$
0.5	1.7	2.6	1.3	1.0	143	148	148	117	123	123
10	0.085	5.8	2.8	2.3	16	21	21	13	18	18
390	0.002	6.3	3.0	2.5	0.5	5.8	5.8	0.4	5.7	5.7
$P=1 \text{ W}$ , $\alpha=12 \text{ W/m}^2\text{K}$ , $R=0.071 \text{ m}$ , $r_0=0.01 \text{ m}$ , $D=1.6 \text{ mm} \rightarrow \varepsilon=0.14$ , $\tau=0.022$ , $R_{th0}=5.2 \text{ K/W}$										

Wenn Platte und Wärmequelle keine Kreisscheiben, sondern jeweils quadratische Platten mit Seitenlängen  $L$  bzw.  $l_0$  sind, dann soll man  $R$  und  $r_0$  aus den äquivalenten Kreisflächen nehmen, d.h. wg.  $L^2=L^2=R^2\pi$  folgen  $R=L/\sqrt{\pi}$  und  $r_0=l_0/\sqrt{\pi}$ . Hier eine Vergleichsrechnung zu  $\lambda=10$  in Tab. 5-1 mit FloTHERM.



**Fig. 5-3:** links: Verlauf der Plattentemperatur für  $\lambda=10$  an der Plattenoberseite bei  $\tau=1$  und an der Plattenunterseite bei  $\tau=0$  nach Gln. (Fig. 5-2)<sup>10</sup>. Beide Kurven sind fast deckungsgleich. Rechts: Simulationsergebnis mit FloTHERM zu  $\lambda=10 \text{ W/mK}$ .

## 5.2. Bemerkungen zum Wärmespreizwinkel

Der Wärmespreizwinkel wird in der älteren Literatur immer als zeichnerisches Hilfsmittel zur Bestimmung des Knicks der Wärmestromdichte beim Übergang von Medium 1 nach Medium 2 benutzt (Wutz, 1991). Ähnlich zur geometrischen Optik gelte die Beziehung

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (5.6)$$

<sup>10</sup> ,dessen Korrektheit der Autor bezweifelt.

wenn die Winkel  $\alpha$  vom Lot her gemessen werden. Es stellt sich allerdings die Frage, was man bei einer Konfiguration kleiner Scheibe auf großer Scheibe als Eintrittswinkel nimmt. Außerdem darf sich im Körper 1 keine aktive Wärmequelle befinden. Für unser Beispiel von Fig. 5.3 sieht der tatsächliche Verlauf der Wärmestromdichte so aus. Von gebrochenen „Wärmestrahlen“ ist leider nichts zu sehen. Unter der Wärmequelle ist es fast isotherm, so dass hier kein Wärmestrom fließt. Der größte Wärmestrom tritt an den Kanten auf.

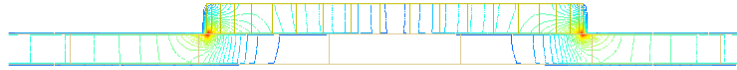


Fig. 5-4: Isolinien der Wärmestromdichte für das Modell aus Fig. 5-3.

### 5.3. Praktische Faustformel für Wärmespreizung

Lasance (2008) diskutiert Wärmespreizszenarien ähnlich zur Aufgabe in Fig. 5-1. Er empfiehlt eine früher von ihm entwickelte „L“-Gleichung, die zu folgender Wärmequellentemperatur führt

$$T - T_U = P \cdot \left( \frac{1}{\alpha A_2} + \frac{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{4\pi\lambda D} - \frac{\gamma}{2\pi\lambda D} \right) \quad (5.7)$$

$A_1$  ist hierbei die Fläche der Wärmequelle,  $A_2$  ist die Plattenfläche und  $\gamma$  ist die Euler-Mascheronische Konstante 0.577, welche auch bei der Entwicklung von  $K_0(x) \approx -\ln(x/2) - \gamma$  nach kleinen Argumenten ins Spiel kommt.<sup>11</sup> Wir wenden Gl. (5.7) in Tab. 5-2 wieder auf die Parameter Tab. 5-1 an.

Tab. 5-2: Auswertung der L-Gleichung (5.7) am kreisförmigen Euro-Beispiel.

$\lambda$	Bi	$\frac{1}{\alpha A_2}$ [K/W]	$\frac{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{4\pi\lambda D}$	$-\frac{\gamma}{2\pi\lambda D}$	$R_{\text{ges}}$	$T_{\text{max}} - T_U$
0.5	1.7	5.3	390	-115	280	280
10	0.085	5.3	19	-5.7	19	19
390	0.002	5.3	0.5	-0.15	5.6	5.6
$P=1 \text{ W}, \alpha=12 \text{ W/m}^2\text{K}, R=0.071 \text{ m}, r_0=0.01 \text{ m}, D=1.6 \text{ mm} \rightarrow A_2=0.016 \text{ m}^2, A_1=3.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$						

Für  $\lambda > 10$  ist die Übereinstimmung mit SLA bemerkenswert. Für schlecht leitende Kunststoffplatten sind vermutlich beide Lösungen nicht anwendbar. Lasance empfiehlt folgende Bereiche nicht zu verlassen:  $R/r_0 > 2$ ,  $m \cdot r_0 < 0.5$ ,  $m \cdot R < 3$ ,  $m \cdot D < 0.15$ .

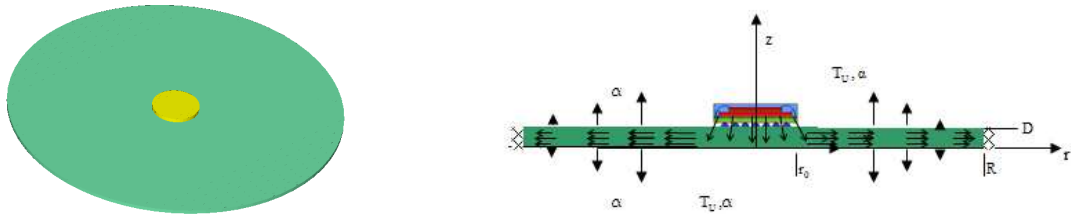
## 6. Wärmespreizung 2-dimensional, orthotrop

### 6.1. Analytische „N-Gleichung“

Niemeier (2006) löst das realistische zylindersymmetrische Problem analytisch:

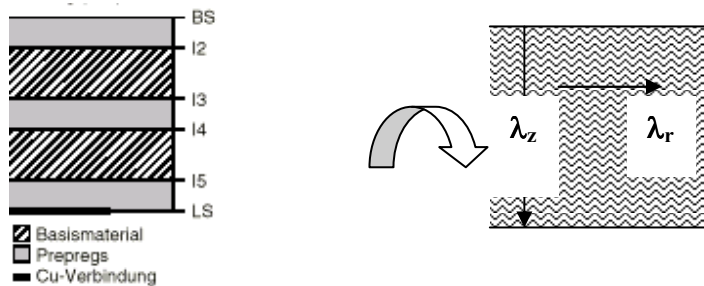
- Die Wärmequelle ist eine Flächenquelle auf der Leiterplatte
- Kühlung von *beiden* Seiten der Platte mit Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$
- *Orthotrope Wärmeleitfähigkeit* in der Platte mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten in  $r$ - und  $z$ -Richtung.

<sup>11</sup> Vermutung: (5.7) lässt sich nicht aus Gl. (4.12) herleiten.



**Fig. 6-1:** Physikalische Situation der N-Lösung: Wärmeabgabe nach oben *und* unten, Wärmespreizung in der Platte. Die Wärmequelle sitzt auf der Leiterplatte.

Letztere Erweiterung bedarf einer kurzen Erklärung. Eine (Multilayer-) Leiterplatte ist ein unter Hitze gepresster Stapel aus beidseitig kupferkaschierten Epoxidharzplatten (Basismaterial) und dazwischengelegten Isolationschichten (prepregs = Glasfasergewebe getränkt mit Epoxidharz). Dadurch resultiert eine unterschiedliche Wärmeleitungsseigenschaft, je nach dem ob die Wärme durch den Stapel oder parallel zu den Lagen fließt.



**Abb. 6-1:** Übergang vom Lagenaufbau als Stapel mit unterschiedlichen Materialien in einen orthotrop leitenden Ersatzkörper; links: Detailaufbau [Ilfa, 99], rechts: orthotrop leitender Ersatzkörper.

In erster Näherung kann man mit den Schichtdicken  $d_i$ , und den irgendwie gemittelten individuellen Leitfähigkeiten der Schichten  $\lambda_i$  aus den Schaltungsregeln Gl. (3.12) und (3.13) folgendermaßen die orthotropen Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_r$  und  $\lambda_z$  bestimmen

$$\lambda_z = \frac{D}{\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\lambda_i}} \quad (6.1)$$

$$\lambda_r = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i d_i}{D} \quad (6.2)$$

Cu-Schichten sind üblicherweise 35  $\mu\text{m}$  dick, Gewebeisolationen ca. 200  $\mu\text{m}$ , mit großen Toleranzen und Variationsbreiten je nach Einsatzgebiet der Leiterplatte. Die Wärmeleitfähigkeit der Prepregs und Kernmaterialien liegt bei ca. 0.5 W/m K, die der Cu-Lagen ist stark vom Lagendesign abhängig und liegt zwischen 1 W/m K und (im Extremfall) 390 W/m K.

	Anzahl der vollen Cu-Lagen	$\lambda_r$	$\lambda_z$
2 Lagen LP	1	10	0.6
14 Lagen LP	6	40	0.7

Die Lösung des 2D-zylindersymmetrischen Wärmeleitungsproblems Gl. (5.1) ist komplex. Es ergibt sich

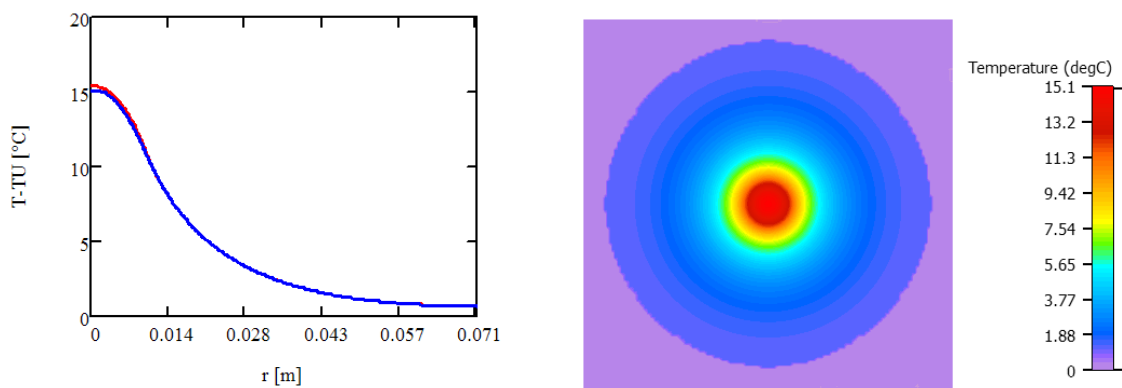
$$T(r, z) - T_U = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh(\sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_z}} k_n z) + b_n \sinh(\sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_z}} k_n z)) \cdot J_0(k_n z) \quad (6.3)$$

mit länglichen Ausdrücken für die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ , sowie Eigenwerten  $k_n$  aus einer Eigenwertgleichung  $J_0(k_n R) - \frac{\lambda_r}{\alpha R} \cdot k_n R \cdot J_1(k_n R) = 0$ . Wir werten in Tab. 6-1 die Gl. (6.3) für unsere bisher verwendeten Standardparameter aus.

**Tab. 6-1:** Auswertung der N-Lösung Gln. (6.3) am kreisförmigen *isotropen* Euro-Beispiel. Die letzte Spalte soll einseitige Abkühlung wie bei SLA approximieren.

$\lambda_z = \lambda_r$	$Bi_z$	$T_{\max} - T_U$	$T_{\max} - T_U$
		$\alpha = 12 \text{ W/m}^2\text{K}$	$\alpha = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$
0.5	0.04	86	130
10	0.002	16	20
390	5e-5	2.5	3

$P=1 \text{ W}$ ,  $R=0.071 \text{ m}$ ,  $r_0=0.01 \text{ m}$ ,  $D=1.6 \text{ mm}$



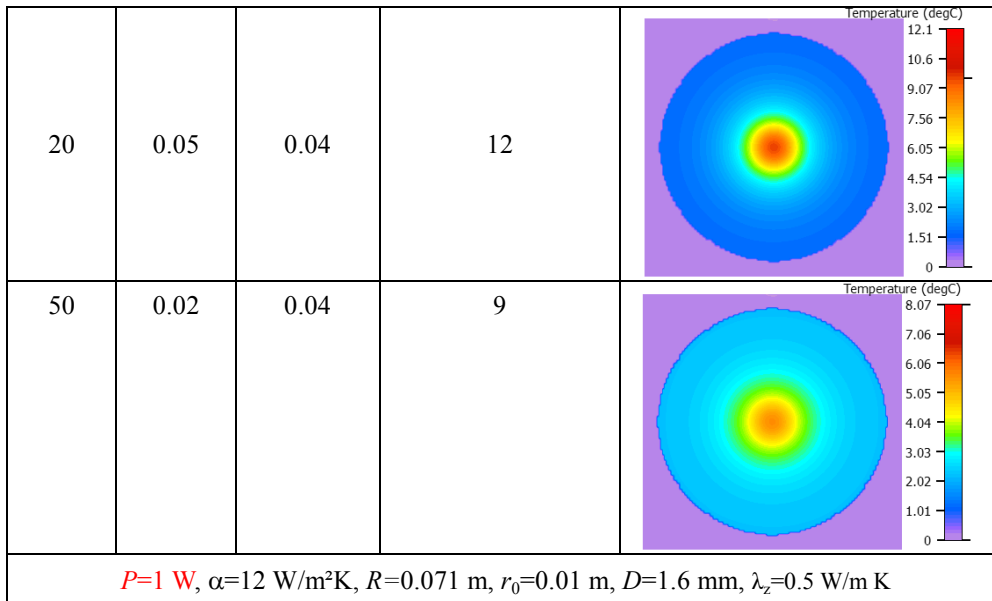
**Fig. 6-2:** links: Verlauf der Plattentemperatur für  $\lambda_{r,z}=10$  nach Gln. (6.3). Beide Kurven sind fast deckungsgleich. Rechts: Simulationsergebnis mit FloTHERM zu  $\lambda_{r,z}=10 \text{ W/mK}$  mit guter Übereinstimmung.

Wenn wir realistischere eine Isolationswirkung in z durch die FR4 Anteile in der Scheibe zulassen, sehen die Ergebnisse etwas anders aus.

**Tab. 6-2:** Auswertung der N-Lösung Gln. (6.3) am kreisförmigen *orthotropen* Euro-Beispiel mit  $\lambda_z=0.5 \text{ W/m K}$ .

$\lambda_r$	$Bi_R$	$Bi_z$	$T_{\max} - T_U$	
5	0.17	0.04	26	
10	0.09	0.04	18	





### 7. Anwendungsbeispiel: SMD-LED auf einer Platte mit Heat-Spreader

Einfache Beispiele wurde schon in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellt. Hier nun eine Kombination aus bereits vorhandenen Einzelteilen.

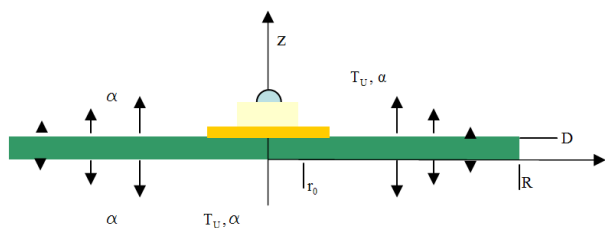


Fig. 7-1: SMD LED auf einem Cu Heat Spreader auf einem FR4 Board

Parameter:

- LED (Wärmequelle): 3 mm x 3 mm,  $r_{LED}=3 \text{ mm}/\sqrt{\pi} = 1.7 \text{ mm}$ ,  $P=0.1 \text{ W}$
- Cu-Spreader: 8 mm x 8 mm,  $r_{Cu}=8 \text{ mm}/\sqrt{\pi} = 4.5 \text{ mm}$ ,  $D_{Cu}=35 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_{Cu}=390 \text{ W/m K}$
- Board: 50 mm x 50 mm,  $R_B=50 \text{ mm}/\sqrt{\pi} = 28 \text{ mm}$ ,  $D_B=1.6 \text{ mm}$ ,  $\lambda_{r,z}=0.5 \text{ W/m K}$
- Wärmeübergang Luft:  $\alpha=12 \text{ W/m K}$  (Annahme)

1. Wärmeübergangskoeffizient Heat Spreader→PCB durch Wärmeleitung:  $\alpha_{-z} = \lambda_z / D_B = 312 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Das ist viel größer als der Übergang nach +z an die Luft  $\alpha_{+z}=12$ .

☼ D.h. der Heat Spreader entwärmt hauptsächlich zum Board hin.

2. Abklinglänge  $\delta$  im Cu-Spreader:  $m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda D}}$ . Hier muss nun der beste Wärmeübergang eingesetzt werden und

die 2 durch 1 ersetzt werden, da die Oberseite des Plättchens vernachlässigbar ist  $m = \sqrt{\frac{\alpha_{-z}}{\lambda_{Cu} D_{Cu}}} = 150 \text{ 1/m}$ .

$\delta=1/m=7 \text{ mm}$ .

☼ D.h. man kann das Plättchen noch als isotherm durchgeheizt ansehen, bzw sein Wärmewiderstand ist vernachlässigbar.

3. Wärmewiderstand des Boards aus der L-Gleichung

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_{r,z} D_B}} = \sqrt{(2 \cdot 12 / (0.5 \cdot 0.00016))} = 170 \text{ 1/m}$$

Test auf:  $R/r_0 > 2$ ,  $m \cdot r_0 < 0.5$ ,  $m \cdot R < 3$ ,  $m \cdot D < 0.15$ . Die letzten beiden Bedingungen sind auf einen Faktor 2 verletzt.

$$R_B = \frac{1}{\alpha \pi L_B^2} + \frac{\ln\left(\frac{L_B^2}{L_{Cu}^2}\right)}{4\pi \lambda_{r,z} D_B} - \frac{\gamma}{2\pi \lambda_{r,z} D_B} = 11 + 364 - 114 = 260 \text{ K/W}$$

Vorhergesagte Temperatur einer perfekten Wärmequelle ohne innere Wärmewiderstände:  $T = T_U + 260 \cdot 0.1 \text{ W} = T_U + 26 \text{ °C}$

4. Wärmewiderstand des Boards aus der vereinfachten SLA-Gleichungen (5.3)-(5.5) (gerundet auf 2 Stellen)

$Bi = 0.67$ ,  $\lambda_c = 6.7$ ,  $\Phi_c = 2.24$ ,  $\Psi_{\max} = 1.06$ ,  $\Psi_{\text{avg}} = 0.86$ ,  $R_{\text{avg}} = 220 \text{ K/W}$ ,  $R_{\max} = 270 \text{ K/W}$ ,  $R_{\text{ges,avg}} = 250 \text{ K/W}$ ,  $R_{\text{ges,max}} = 300 \text{ K/W}$ .

Vorausgesagte Temperatur  $T = T_U + 25 \text{ °C}$

5. Wärmewiderstand des Boards aus der N-Gleichung  
 $R = 210 \text{ K/W}$ . Vorhergesagte Temperatur  $T = T_U + 21 \text{ °C}$

6. Simulationsergebnis  $P = 0.1 \text{ W}$ .  $T = T_U + 23 \text{ °C}$

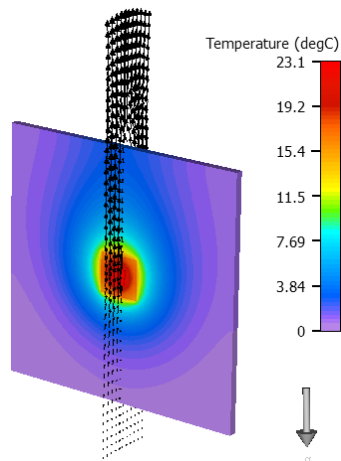


Fig. 7-2: Simulationsergebnis zum Rechenbeispiel. Die Skala zeigt die Maximaltemperatur.

☼ Alle Näherungsformeln kreisen irgendwie den richtigen Wert ein. Die simulierte mittlere Temperatur im Heat Spreader ist  $19 \text{ °C}$ .

Normalerweise haben Bauteile noch einen inneren Wärmewiderstand der mehr oder weniger dazugezählt werden müsste. Bei LEDs liegt er in der Gegend von  $100 \text{ K/W}$ . Die LED Temperatur unseres Beispiels wäre demnach ca.  $T = T_U + 23 \text{ °C} + 10 \text{ °C} = T_U + 33 \text{ °C}$

## 8. Wärmespreizung und Strombelastbarkeit von Leiterbahnen<sup>12</sup>

### 8.1. Die Designrichtlinie IPC-2221

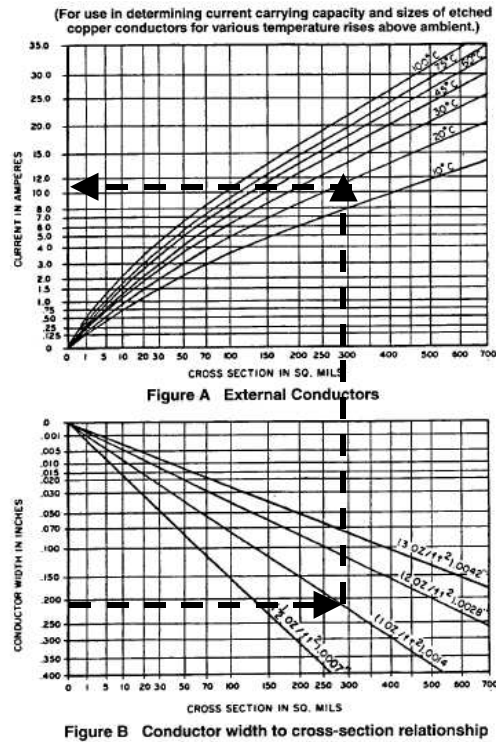
Eine Leiterbahn, durch die ein genügend hoher Strom fließt heizt sich wie ein Tauchsieder auf und führt unter Umständen zu lokalen Zerstörungseffekten, die sich letztendlich auf die gesamte Leiterplatte auswirken können.

<sup>12</sup> Gekürzte Version von Adam (2007)

Der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Temperatur wird auf Deutsch *Strombelastbarkeit* oder im englischen *Current Carrying Capacity* genannt.

Als Wärmequelle haben wir jetzt kein flächenhaftes Bauteil, sondern einen linienartigen Streifen.

Die Designrichtlinie IPC-2221 (=IPC-D-275=MIL-STD-275), und in ihrer deutschen Übersetzung FED 22-02, wird von Vielen als Grundlage für die Abschätzung der Leitertemperatur verwendet. In Adam (2007) wird ausführlicher diskutiert, welchen Ursprung die IPC-Diagramme haben und welche berechtigten Zweifel bezüglich des Anwendungsbereichs und der sog. internal conductors angebracht werden können.



**Fig. 8-1:** IPC-2221 Nomogramm für „externe Leiter“ (aus Brooks, 2001) mit Anwendungsbeispiel.

Die Benutzung geht folgendermaßen (gestrichelte Linien):

**Schritt 1:** Man bestimme den Leiterbahnquerschnitt  $F$  (in square mils=Quadrat-tausendstel Inch) im unteren Hilfsdiagramm aus Leiterbahnbreite (in Inch) und der Leiterbahndicke (in oz)<sup>13</sup>

Leiterbahndicke in oz	Leiterbahndicke in $\mu\text{m}$
0.5	17.5
1	35
2	70

Die Leiterbahnbreite  $b$  wird in Inches angegeben.

Leiterbahnbreite in Inches	Leiterbahnbreite in mm
0.1	0.25
1	2.54

**Schritt 2:** Man überträgt den Leiterquerschnitt in das obere Diagramm und liest das gewünschte Paar aus Stromstärke  $I$  und Temperaturerhöhung  $\Delta T$  ab.

Brooks (1989) gibt eine Fitformel für die 1-oz Diagramme an

$$I = 0.065 \cdot \Delta T^{0.43} \cdot A^{0.68} \quad (8.1)$$

<sup>13</sup> Dickenangabe erfolgt über das Flächengewicht von Kupfer. 1 oz Kupfer, breitgedrückt auf 1 ft<sup>2</sup> ist 35  $\mu\text{m}$  dick.

mit  $A$  hier in sq.mils, bzw.

$$\Delta T = 576 \cdot A^{-1.58} \cdot I^{2.33} \quad (8.2)$$

Außerdem diskutiert er Ergebnisse aus der Zeitschrift „Design News“ (im folgenden DN) aus dem Jahr 1968 mit folgendem Ergebnis für 1 oz Leiterdicke

$$I = 0.04 \cdot \Delta T^{0.45} \cdot A^{0.69} \quad (8.3)$$

bzw.

$$\Delta T = 178 \cdot A^{-1.53} \cdot I^{2.22} \quad (8.4)$$

Die „Design News“  $I(\Delta T)$  - Kurven sind also im Strom um den Faktor  $0.065/0.04=1.63$  gegenüber der IPC gestaucht, bzw. die  $\Delta T(I)$ -Kurven sind in  $\Delta T$  um den Faktor 3.2 gestaucht.

Brook's etwas elaboriertere lineare Regression ergab (in seiner Notation) mit Leiterbreite  $W$  und -dicke  $Th$

$$I = k_{DN} \cdot \Delta T^{0.46} \cdot W^{0.76} \cdot Th^{0.54} \quad (8.5)$$

## 8.2. Modellrechnungen und Kritik an der IPC-2221

James Joule hat auf der Suche nach dem Wärmeäquivalent um das Jahr 1841 experimentell den Zusammenhang zwischen der Heizleistung  $P$  [W] in einem Stromleiter und der Stromstärke  $I$  [A] (Gleichstrom)

$$P = R \cdot I^2 \quad (8.6)$$

entdeckt. Auf Heinrich Lenz, etwa um die gleiche Zeit, geht eine Formulierung für den elektrischen Widerstand  $R$  [Ohm] eines Metalldrahts als Funktion seiner geometrischer Größen Länge  $L$  [m] und Querschnittsfläche  $A=b \cdot d$  [mm<sup>2</sup>] und der Temperatur des Leiters  $T$  [°C] zurück

$$R = \frac{L}{A} \rho_{20} (1 + \alpha_{20} \cdot (T - 20^\circ\text{C})). \quad (8.7)$$

$\rho_{20}$  [Ohm mm<sup>2</sup>/m] charakterisiert den spezifischen elektrischen Widerstand des Leitermaterials und  $\alpha_{20}$  [1/K] einen Temperaturkoeffizient, jeweils hier bei 20°C. Die lineare Temperaturabhängigkeit ist natürlich nur eine lineare Approximation an den leicht gekrümmten Verlauf von  $\rho(T)$  für Temperaturen unterhalb von ca. 1000 K. Für reines Kupfer und lineare Anpassung bei 20°C sind die Werte

$$\rho_{20}=0.0175 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}, \quad \alpha_{20}=0.00395 \text{ 1/K}. \quad (8.8)$$

Wir berechnen numerisch mit FloTHERM die Leiterbahntemperatur auf einer senkrecht stehenden Euro-Format Leiterplatte, die durch ihren Lagenaufbau unterschiedlichen Cu-Anteil, bzw. Wärmespreizigenschaften haben kann. Die geometrischen Größen sind wie in Abb. 8-2 definiert.

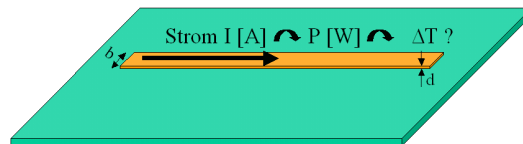


Fig. 8-2: Definition der Breite und Dicke der Leiterbahn auf der Leiterplatte

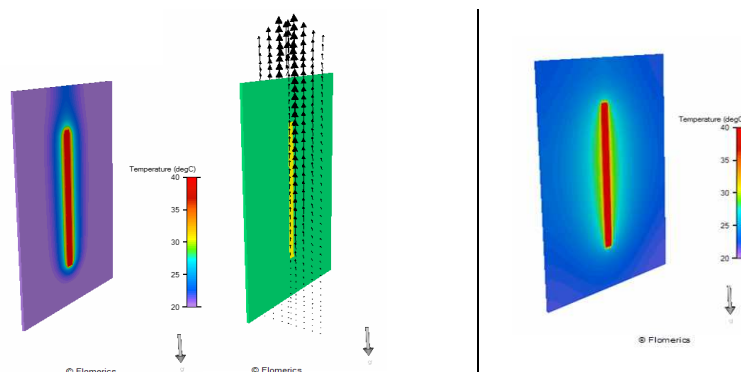


Fig. 8-3: Perspektivische Darstellung des Simulationsergebnis für eine 100 mm langen Leiterbahn ( $b=5$  mm,  $d=35$  µm) mit 20°C Übertemperatur auf einer Euro-LP. **Links:**  $I=7.1$  A bei reinem FR4, **rechts:**  $I=11$  A bei 35 µm rückseitiger Cu-

Kaschierung. Man erkennt, dass die Wärmespreizung rechts viel besser ist und daher bei gleicher Temperatur mehr Strom transportiert werden kann.

Wir vergleichen in Abb.8-4 unsere numerischen Rechnungen mit Gln. (8-1) und (8-3). Die Übereinstimmung ist sehr gut.

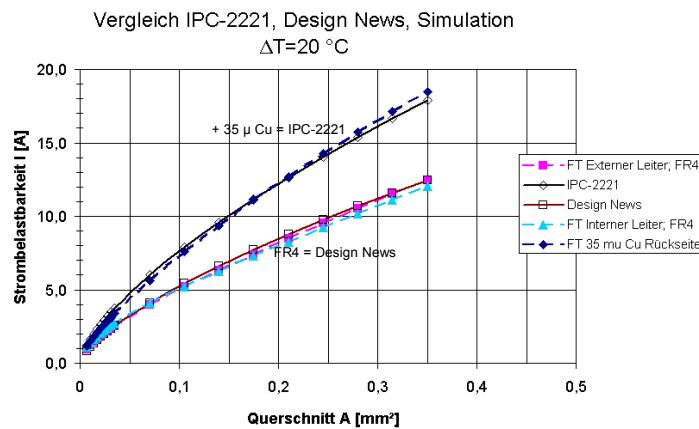


Fig. 8-4: Strombelastbarkeit zu  $d=35\ \mu\text{m}$  und  $\Delta T=20^\circ\text{C}$  aus Simulationsergebnissen („FT“) und Brook’s Fitkurven zur IPC-2221 und zu „Design News“.

Man kann also feststellen, dass

- die IPC-Kurven **nur** für eine 2-seitig kupferkaschierte Leiterplatte mit ungeätzter Rückseite und
- die DN Kurven **nur** für eine 1-lagige Leiterplatte gelten.

Aus der Analyse dieser und anderer Berechnungsergebnisse kann man folgende Kritikpunkte an der IPC-2221 zusammenfassen

- Die Diagramme (Abb. 8-1) gelten nur für einen Typ von Leiterplattenaufbau.
- Fehler #1: es gibt kaum Unterschiede zwischen der Temperaturerhöhung einer außenliegenden und innenliegenden Leiterbahn. Die Aussage, dass innenliegende Leiterbahnen nur die Hälfte des Stroms transportieren ist Hysterie. Im Gegenteil: innenliegende Leiterbahnen werden sogar etwas kühler, da der Gesamtwärme-widerstand durch die Leiterplatte hindurch kleiner ist.
- Fehler #2: die reine Abhängigkeit der Strombelastbarkeit von  $A$  in Abb. 8-1 kann nicht richtig sein. Beispielsweise hat die Leiterbahn in Abb. 8-5 den gleichen Querschnitt, aber es ist die Grundfläche auf der Leiterplatte, die den Wärmeeintrag in die LP und dadurch die Kühlung mitbestimmt. Die linke Konfiguration kann bei gleicher Temperatur mit einem höheren Strom belastet werden.

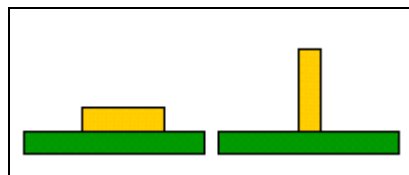


Fig. 8-5: Fehler #2 in der IPC-2221. Die Leiterbahnen links und rechts haben den gleichen Querschnitt, können aber bei gleichem Strom nicht die gleiche Temperatur haben.

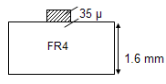
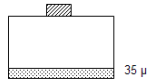
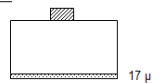
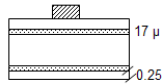
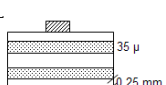
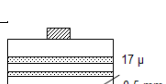
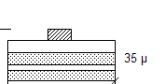
### 8.3. Katalog von Strombelastbarkeitsdiagrammen und empirischer Zusammenhang der Parameter

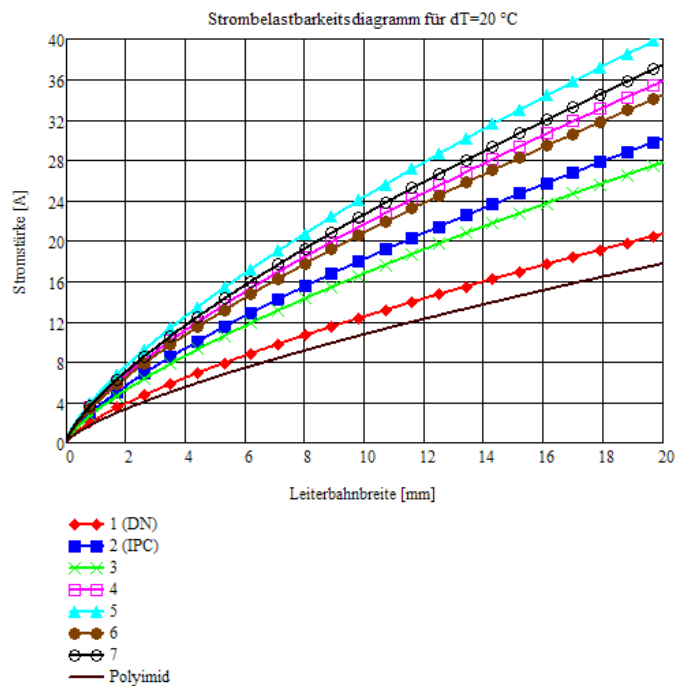
Mit dem oben diskutierten Berechnungsmodell und Simulationsverfahren berechnen wir Leitertemperaturen für ein erweitertes Feld von Leiterplattenaufbauten. Die berechneten Strombelastungskurven für eine Leiterbahndicke von  $35\ \mu\text{m}$  gehorchen einer empirischen Fitformel

$$\Delta T = B_{LP} b^{-1.45} I^2 \quad (8.9)$$

Die Proportionalitätskonstante  $B_{LP}$  hängt vom Leiterplattenaufbau (Kupfergehalt und Abstand der Leiterbahn von der ersten Cu-Lage) ab. Je besser die effektive thermische Leitfähigkeit der Leiterplatte ist, desto kleiner ist der Wert von  $B_{LP}$ .

**Tab. 8-1:** Werte des Koeffizienten  $B_{LP}$  für Gl. (8.9)

Leiterplattenaufbau		$B_{LP}$
1 (DN)		3.6
2 (IPC)		1.7
3		2.0
4		1.2
5		0.95
6		1.3
7		1.1



**Fig. 8-6:** Strombelastbarkeitsdiagramm der Leiterplattenaufbauten 1-7 und der Polyimid-Folie für Leiterbahndicke 35 µm.

#### 8.4. Leiterbahndicke

Die berechneten obigen Diagramme (wie die der IPC-2221 auch) gelten *nur* für die Leiterbahndicke  $d=35\ \mu\text{m}$ . Wie sind die Verhältnisse bei anderer Dicke  $d$ ? Entscheidend für die Temperatur ist der Wärmeeintrag durch die Verlustleistung  $P$  über den Footprint der Leiterbahn. Angenommen, wir wollen die obigen  $\Delta T$ - $I$ -Diagrammen für eine Leiterbahn der doppelten Dicke, also  $d=70\ \mu\text{m}$  verwenden, dann müssen wir **die Kurve für dieselbe Leiterbahnbreite  $b$**  benutzen. Allerdings ist der Widerstand der Leiterbahn bei  $d=70\ \mu\text{m}$  nur halb so groß. Wegen  $P=R \cdot I^2$  würde aber ein  $\sqrt{2}$ -mal stärkerer Strom wieder die gleiche Verlustleistung und damit die gleiche Temperaturerhöhung bringen. Die Temperatur ist gleich, wenn die Leistung  $R \cdot I^2$  und die Leiterbreite gleich sind. Diese Skalierungsregel für andere Leiterbahndicken  $d$  kann man demnach schreiben als

$$\frac{1}{35\ \mu\text{m} \cdot b} \cdot I_{35\ \mu}^2 = \frac{1}{d \cdot b} \cdot I^2 \quad (8.10)$$

$I_{35\ \mu}$  wird in Gl. (8.9) benutzt bzw. definiert

$$\Delta T = B_{LP} \cdot b^{-1.45} \cdot I_{35\ \mu}^2$$

$I_{35\ \mu}$  aus Gl. (4.2) darin eingesetzt ergibt als allgemeinen Zusammenhang ( $d$  ist natürlich in  $\mu\text{m}$  zu messen,  $b$  in mm):

$$\Delta T = B_{LP} \left( \frac{b}{\text{mm}} \right)^{-1.45} \left( \frac{d}{35\ \mu\text{m}} \right)^{-1} \cdot I^2 \quad (8.11)$$

Erinnern wir uns an Brook's Gl. (8.5)  $I = k_{DN} \cdot \Delta T^{0.46} \cdot W^{0.76} \cdot Th^{0.54}$  ! Wenn wir Gl. (8.11) nach  $I$  auflösen, ergibt sich

$$I = B_{LP}^{-0.5} \cdot \Delta T^{0.5} \cdot \left( \frac{b}{\text{mm}} \right)^{0.72} \cdot \left( \frac{d}{35\ \mu\text{m}} \right)^{0.5}$$

also so gut wie das identische Ergebnis, nur dass ihm die entsprechende Empirie für die IPC nicht zur Verfügung stand.

Ein kleines Anwendungsbeispiel: Eine Leiterbahn mit Breite  $b=5\ \text{mm}$  aus Dickschichtkupfer  $d=100\ \mu\text{m}$  auf einer einlagigen Leiterplatte (DN-Typ) darf sich um  $40\ \text{°C}$  gegen Umgebung erhitzen  $\rightarrow$  die maximale Stromstärke ist dann ca. 18 A.

#### 8.5. Polyimidfolie

In flexiblen Leiterplatten(teilen) werden dünne Polyimidfolien benutzt. Die Rechnungen ergeben für dünne Polyimidfolie der Dicke 0.3 mm mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda=0.3\ \text{W/m-K}$

$$\Delta T = 4.9 \left( \frac{b}{\text{mm}} \right)^{-1.45} \left( \frac{35\ \mu}{d} \right) I^2 \quad (8.12)$$

#### 8.6. Keramiksubstrat

Ersetzen wir das kunststoffbasierte Trägermaterial durch eine 1 mm dicke Keramikplatte mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda=16\ \text{W/m K}$  so ergibt sich

$$\Delta T = 0.45 \left( \frac{b}{\text{mm}} \right)^{-1.1} \left( \frac{35\ \mu}{d} \right) I^2 \quad (8.13)$$

Man beachte, dass der Exponent für  $b$  sich signifikant geändert hat.

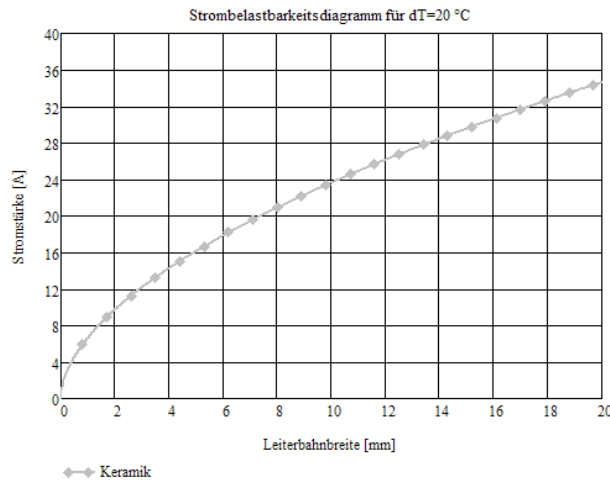


Fig. 8-7: Strombelastbarkeit für ein 1 mm dickes Keramiksubstrat mit Leiterbahndicke 35  $\mu\text{m}$ .

### Danksagung.

Herrn StD H. Niemeier danke ich herzlich für die mathematischen Untersuchungen zu Kap. 6 und Diskussionen zu SLA.

### Literaturverzeichnis.

- Adam, J.: „Strombelastbarkeit von Leiterbahnen“. 1. Tagung Elektronikkühlung Haus der Technik (2007)
- Brooks, D.: „Temperature Rise in PCB Traces“, pdf-file <http://www.ultracad.com/articles/pcbtemp.pdf> Reprinted from the Proceedings of the PCB Design Conference, West, March 23-27 (1998)
- Brooks, D.: „Using the IPC temperature charts“ [http://www.ultracad.com/using\\_ipc\\_temp\\_charts.pdf](http://www.ultracad.com/using_ipc_temp_charts.pdf) (2001).
- Ilfa Feinstleiteteknik GmbH: Leiterplattenhandbuch 3.0 (CDROM) (1999)
- Kordyban T.: „Some tricks of the trade of a Flotherm user“. 6<sup>th</sup> International FloTHERM User Conference (1997)
- Lasance, C.J.M.: „Heat Spreading: Not a trivial Problem“. Electronics Cooling Magazine, May (2008)
- Lee, S., Song, S., Au, V.: "Closed-Form Equation for with Variable Thermal Constriction/Spreading Resistance Boundary Condition" IEPS Conference, 111-121(1994)
- Lee, S., Song, S., Au, V., Moran, K.P.: "Constriction/Spreading Resistance Model for Electronic Packaging", Proceedings of ASME/JSME Engineering Conference, Vol. 4, 199-206 (1995)
- Lienhard, J.H. III., Lienhard, J.H. IV. „A Heat Transfer Textbook“. 3<sup>rd</sup> Ed. <http://web.mit.edu/lienhard/www/ahtt.html> (2006)
- Niemeier, H.: „Stationäres Temperaturprofil in einer geheizten Platte“, priv. Mitt. (2006)
- Simons, R.E.: „Simple formulas for estimating thermal spreading resistance“, Electronics Cooling Magazine, May (2004)
- Wutz, M.: Wärmeabfuhr in der Elektronik. Vieweg Verlag (1991)

Tipp: Googlen Sie nach dem Titel des Artikels